2018. évi Mikola 2. forduló megoldásai:

9. gimnázium

1)

Megoldás. a) Mivel azonos és állandó nagyságú sebességgel történik a mozgás, a megtett utak egyenlők:

$$s_A = s_B = v_A t = v_B t = 4\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \cdot \pi\ \mathrm{s} = 4\pi \approx 12{,}57\ \mathrm{m}.$$

b) Ha a B testnek nem nulla a gyorsulása, csak akkor lehet állandó nagyságú a sebessége, ha a gyorsulás-vektor merőleges a sebesség-vektorra. Ha ezen felül az is igaz, hogy a gyorsulás nagysága állandó, akkor csak egyenletes körmozgás jöhet létre! Vagyis a B testre állandó nagyságú, sebességére merőleges erőnek is kell hatni. (Eredetét a feladat nem kérdezi.) Az A test tehát egyenes vonalú egyenletes mozgást, a B test pedig *egyenletes körmozgást* végez. Kérdés, hová jutott ezalatt a találkozási helytől a B test?

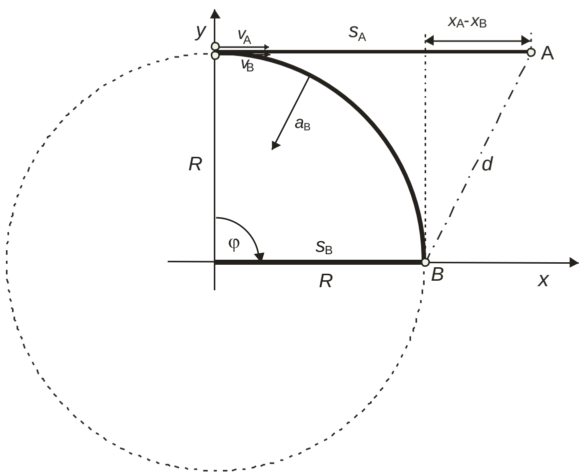
Határozzuk meg a pályájának sugarát! Ismeretes a centripetális gyorsulás, a sebesség és a körsugár kapcsolata: $a_{cp} = \dfrac{v^2}{R}$.

Az egyenletből a B test pályakörének sugara: $R = \dfrac{v^2}{a_{cp}} = \dfrac{v^2}{a_{cp}} = \dfrac{\left(4\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)^2}{2\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}} = 8\ \mathrm{m}.$

Mekkora szögelfordulás tartozik ehhez a két adathoz? Az ív és sugár kapcsolata: $\varphi = \dfrac{s_B}{R} = \dfrac{4\pi\ \mathrm{m}}{8\ \mathrm{m}}\ \mathrm{rad} = \dfrac{\pi}{2}\ \mathrm{rad}$. Tekintsük a kör középpontját origónak. A két pont távolsága koordinátáik különbségének négyzetösszegéből vont négyzetgyökeként (egyszerűbben szólva a Pitagorasz-tétel alkalmazásával) kapható:

$$d = \sqrt{\left(x_A - x_B\right)^2 + \left(y_A - y_B\right)^2}.$$

Határozzuk meg az egyes koordinátákat!
Tekintsük az ábrát!



$$x_A = s_A = 12{,}57\text{ m},\ \ y_A = 8\text{ m},$$

$$x_B = R = 8\text{ m},\ \ y_B = 0.$$

A keresett távolság az adott időpillanatban:

$$d = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2} = \sqrt{(12{,}57\text{ m} - 8\text{ m})^2 + (8\text{ m} - 0\text{ m})^2} = 9{,}21\text{ m}.$$

2)

Megoldás.

a) A dinamika alaptörvényét alkalmazzuk a pontrendszerre a két esetben:

$$(2m - m)\cdot g = (4m + m_x)a_1,$$

$$(m + m_x - 2m)\cdot g = (4m + m_x)a_2.$$

Fogalmazzuk meg a két gyorsulás közötti kapcsolatot: $a_2 = 2\cdot a_1$.

Az egyenletrendszert megoldva, választ kapunk az a) és b) kérdésekre:

$$m_x = 3m,\ a_1 = \frac{1}{7}g,\ a_2 = \frac{2}{7}g.$$

b)

Az m_x tömegű test a kocsival együtt a_1 gyorsulással mozog, ezt a tapadási erő biztosítja:

$$\mu_0 m_x g = m_x a_1 \ \rightarrow\ \mu_0 \geq \frac{1}{7} \approx 0{,}14.$$

3)

Megoldás.

a)

$$mg = \frac{1}{2}c\rho_{\text{lev}}Av_1^2 = \frac{4}{3}\pi\rho_{\text{víz}}r^3 g \qquad \rightarrow \qquad v_1 = \sqrt{\frac{8\pi\rho_{\text{víz}}r^3 g}{3c\rho_{\text{lev}}A}} = \sqrt{\frac{8\rho_{\text{víz}}rg}{3c\rho_{\text{lev}}}} = 4{,}44\ \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

b) Ha a csepp tömege (és így a térfogata is) a kétszeresére nő, akkor a sugara $\sqrt[3]{2} = 1{,}26$-szorosa lesz. Így az előző összefüggés alapján az új sebesség:

$$v_2 = \sqrt{\sqrt[3]{2}}\cdot v_1 \approx 5\ \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

c) Az esőcseppre ható erők eredője nulla, mert a csepp szélben is egyenes vonalú egyenletes mozgást végez. A függőleges nehézségi erőt csak úgy tudja kiegyenlíteni a közegellenállási erő, ha a csepp vízszintes irányban felveszi a szél sebességét. Tehát ilyenkor a csepp eredő sebessége:

$$v_3 = \sqrt{v_2^2 + v_{\text{szél}}^2} = 11{,}2\ \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Megjegyzés: A cseppre a levegő felhajtóereje is hat, de az elhanyagolható a csepp súlyához képest.

4)

Megoldás.

Adatok: D = 100 N/m, M = 2 kg, m = 1 kg, $\Delta l_0 = 0{,}4\ \text{m}$.

a)
Tömegpont egyensúlyának feltétele, hogy a testre ható erők eredője nulla legyen. A fonálban ébredő erő:

$$K = 2D\Delta l_0 - (M+m)g = 50\ \text{N}.$$

b)
A fonál elvágását követően a M + m tömegű testre csak a nehézségi erő és két rugóerő hat. A testek gyorsulása az induláskor:

$$a = \frac{2D\cdot \Delta l - (M+m)g}{M+m} = \frac{50}{3}\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \approx 16{,}67\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

c)
A testek akkor érik el a legnagyobb sebességüket, amikor a gyorsulásuk nullára csökken, azaz a rájuk ható erők eredője nullára csökken. Ekkor a rugók összenyomódása:

$$\Delta l_1 = \frac{(M+m)g}{2D} = 0{,}15\ \text{m}.$$

A testek legnagyobb sebességének meghatározásakor használhatjuk a mechanikai energiák megmaradásának törvényét:

$$2\cdot\frac{1}{2}D\cdot\Delta l_0^2 = 2\cdot\frac{1}{2}D\cdot\Delta l_1^2 + (M+m)g(\Delta l_0 - \Delta l_1) + \frac{1}{2}(M+m)\cdot v_{\max}^2.$$

A fenti egyenletből a legnagyobb sebesség kifejezhető. A behelyettesítést követően:

$$v_{\max} = 2{,}04\ \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

d)
Az apró test akkor fogja elhagyni a lapot, amikor a rugók deformáltsága eltűnik. Megint használhatjuk a mechanikai energiák megmaradásának törvényét:

$$2\cdot\frac{1}{2}D\cdot\Delta l_0^2 = (M+m)g\cdot\Delta l_0 + \frac{1}{2}(M+m)\cdot v^2.$$

A fenti egyenletből a keresett sebesség kifejezhető. A behelyettesítést követően:

$$v \approx 1{,}63\ \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Gimnázium 10.
1)
Megoldás.

a) A láda csúszva indul meg a szalagon, gyorsulása:

$$a=\frac{\sum F}{m}=(\mu\cdot\cos\alpha-\sin\alpha)\cdot g\approx 0,2\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

Ezzel a gyorsulással $t_1=\frac{v_{sz}}{a}=5,1\,s$ alatt éri el a szalag sebességét, és eközben $s_1=\frac{v_{sz}\cdot t_1}{2}=2,55\ \text{m}$-t halad.

A hátralévő 2,45 m távolságot egyenletes mozgással teszi meg a láda a szalaggal együtt, $t_2=2,45\ \text{s}$ alatt.

A láda tehát $t=t_1+t_2=7,55\ \text{s}$ alatt ér fel a futószalag tetejére.

b) A futószalag által kifejtett csúszási súrlódási erő és a test szalaghoz viszonyított relatív elmozdulásának szorzata adja a súrlódási hőt:

$$Q=|W_{\text{s}}|=\mu mg\cos\alpha\cdot s_{\text{rel}}=\mu mg\cos\alpha\cdot(v_{sz}\cdot t_1-s_1)=66,25\ \text{J}.$$

2)

Megoldás:

Adatok: p_1 = 6 · 10^5 Pa; v_1 = 20 m/s; A_1 = 8 cm^2; p_2 = 3,5 · 10^5 Pa; A_2 = 3 cm^2; A_3 = 2 cm^2.
a) A főágon és az elágazás utáni vastagabb ágon átmenő egyik áramvonalra írjuk fel a Bernoulli-egyenletet, hogy megkapjuk a vastagabb ágbeli áramlási sebességet:

$$p_1+\frac{1}{2}\rho v_1^2=p_2+\frac{1}{2}\rho v_2^2 \qquad\rightarrow\qquad v_2=\sqrt{\frac{2}{\rho}(p_1-p_2)+v_1^2}=30\,\frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Az elágazásba befolyó és kifolyó vízre alkalmazzuk az anyagmegmaradást kifejező kontinuitási egyenletet, hogy megkaphassuk a vékonyabb ágbeli áramlási sebességet:

$$A_1v_1=A_2v_2+A_3v_3 \qquad\rightarrow\qquad v_3=\frac{A_1v_1-A_2v_2}{A_3}=35\,\frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Alkalmazzuk újra a Bernoulli-egyenletet a főág és a vékonyabb ág egyik áramvonalára:

$$p_1+\frac{1}{2}\rho v_1^2=p_3+\frac{1}{2}\rho v_3^2 \qquad\rightarrow\qquad p_3=p_1+\frac{1}{2}\rho(v_1^2-v_3^2)=1,875\ \cdot 10^5\ \text{Pa}.$$

Megjegyzés:
Felhasználtuk, hogy a víz sűrűsége hozzávetőlegesen 1000 kg/m^3.
b) A vízhozam (térfogat/idő) így írható fel: $\frac{\Delta V}{\Delta t}=Av$. Ennek segítségével az egyes ágakon kifolyó vízmennyiség:

$$\Delta V_2 = A_2 v_2 \Delta t = 0{,}54\ \mathrm{m}^3 = 540\ \text{liter} \qquad \text{és} \qquad \Delta V_3 = A_3 v_3 \Delta t = 0{,}42\ \mathrm{m}^3 = 420\ \text{liter}\,.$$

Megjegyzés:
Eredményünket úgy ellenőrizhetjük, ha kiszámítjuk a főág vízhozamát is:

$$\Delta V_1 = A_1 v_1 \Delta t = 0{,}96\ \mathrm{m}^3 = 960\ \text{liter}\ (= 540\ \text{liter} + 420\ \text{liter})\,.$$

3)

Megoldás.

a)

Írjuk fel az állapotegyenletet mindkét gázra:

$$p_2 V_0 = \frac{m}{M} R T_0 \cdot,\ \ p_1 \cdot 3V_0 = \frac{m}{M} R T_0\,.$$

A fenti egyenleteket vizsgálva, adódik:

$$p_2 = 3 \cdot p_1\,.$$

A két tartályban uralkodó nyomások különbségéből adódó erő tart egyensúlyt az m_0 tömegű dugattyúra ható nehézségi erővel: $(p_2 - p_1) \cdot A = m_0 g \ \Rightarrow\ m_0 = \dfrac{(p_2 - p_1) \cdot A}{g} = \dfrac{2p_1 \cdot A}{g} \neq 0$.

b)

Legyen az alsó gáz nyomása kezdetben p_2, majd a felmelegítés után az állapotjelzői: p_2^*, $V_2 = xV_0$! Hasonlóan, legyen az felső gáz nyomása kezdetben p_1, majd a felmelegítés után az állapotjelzői: p_1^*, $V_1 = (4 - x) \cdot V_0$!

Az m_0 tömegű dugattyú mindkét állapotban egyensúlyban van:

$$p_1 A + m_0 g - p_2 A = 0,$$

$$p_1^* A + m_0 g - p_2^* A = 0.$$

Ezekből: (1) $\quad p_2 - p_1 = p_2^* - p_1^*.$

Az alsó és felső gázok tömege és hőmérséklete egyenlő, ezért a Boyle–Mariotte-törvényből:

$$p_1 \cdot 3V_0 = p_2 \cdot V_0, \qquad p_2 = 3p_1.$$

$$p_1^* \cdot (4 - x) V_0 = p_2^* \cdot x V_0, \qquad p_2^* = \frac{4 - x}{x} \cdot p_1^*.$$

Ezeket (1)-be beírva:

$$2p_1 = \frac{4 - 2x}{x} \cdot p_1^*,$$

(2) $$\frac{p_1}{p_1^*} = \frac{2 - x}{x}.$$

Írjuk fel a felső térrészben lévő gáz két állapotára az egyesített gáztörvényt!

$$\frac{p_1 \cdot 3V_0}{T_0} = \frac{p_1^*(4-x)\cdot V_0}{T},$$

$$\frac{p_1}{p_1^*} = \frac{T_0}{3T}\cdot(4-x),$$

$$(3) \qquad \frac{p_1}{p_1^*} = \frac{2}{15}\cdot(4-x).$$

(2) és (3) összehasonlításából:

$$\frac{2-x}{x} = \frac{2}{15}\cdot(4-x),$$

$$2x^2 - 23x + 30 = 0.$$

Ezt megoldva: $x = \frac{3}{2}.$

A keresett arány: $\boxed{\frac{V_1}{V_2} = \frac{4-x}{x} = \frac{5}{3}.}$

4)

Megoldás.

a)

A rúd gyorsulásának csökkenése akkor kezdődik, amikor a rúd alsó pontja a lapok közé lép. A sebesség maximális, ha: $\sum F = 0$.

Az előzőt részletezve: $mg = E\frac{Q}{l}x$, ahol x a rúd lemezek közé került részének a hossza.

A példa szövege alapján: $EQ = 2mg$, így $x = \frac{l}{2}$.

A sebesség maximum az előző folyamatra felírt munkatétellel határozható meg:

$$\Sigma W = \Delta E_{\text{kin}},$$

$$mg\,\frac{3}{2}l - \frac{0+E\frac{Q}{2}}{2}\;\frac{l}{2} = \frac{1}{2}\,m\,v_{\text{max.}}^2 - 0,$$

$$mg\,\frac{3}{2}l - mg\,\frac{l}{4} = \frac{1}{2}\,m\,v_{\text{max.}}^2 - 0,$$

$$v_{\text{max.}} = \sqrt{\frac{5lg}{2}}\,,$$

$$v_{\text{max.}} = \sqrt{5}\;\frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

b)

Az egész folyamatra felírva a munkatételt:

$$\Sigma W = \Delta E_{\text{kin.}},$$

$$mg(l + 2l) - \frac{0+EQ}{2}\;l - EQl = \frac{1}{2}\,mv^2 - 0,$$

$$mg3l - mgl - 2mgl = \frac{1}{2}mv^2 - 0,$$

$$v = 0\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\,.$$

c)
Az időintervallum két azonos hosszúságú részből áll, mivel a két részben a gyorsulás és a megtett utak megegyeznek, a kezdő és végsebességek pedig felcserélődnek:

$$\Delta t = \Delta t_{\text{lefelé}} + \Delta t_{\text{felfelé}}\,,$$

$$\Delta t = 2\Delta t_{\text{felfelé}}\,.$$

A felfelé mozgást elemezve:

$$\Sigma\mathbf{F} = m\mathbf{a},$$

$$EQ - mg = ma,$$

$$2mg - mg = ma,$$

$$a = g.$$

Mivel a mozgás konstans gyorsulással történik:

$$l = \frac{a}{2}\Delta t_{\text{felfelé}}^2\,,$$

$$\Delta t_{\text{felfelé}} = \sqrt{\frac{2l}{g}}\,,$$

$\Delta t_{\text{felfelé}} = 0{,}2$ s, így $\Delta t = 0{,}4$s.

Szakgimnázium 10.

1)

Megoldás.

a)

A keresett távolság három útszakasz összege: $d = s_1 + s_2 + s_3$.

Az egyes útszakaszok:

$$s_1 = \frac{1}{2} a_1 \cdot t_1^2 = \frac{1}{2} \cdot 4\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot (3{,}5\,\mathrm{s})^2 = 24{,}5\,\mathrm{m}\,,$$

$$s_2 = v_2 \cdot t_2 = (a_1 \cdot t_1) \cdot t_2 = \left(4\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot 3{,}5\,\mathrm{s}\right) \cdot 50\,\mathrm{s} = 700\,\mathrm{m}\,,$$

$$s_3 = v_2 \cdot t_3 - \frac{1}{2} a_2 \cdot t_3^2 = 14\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \cdot 4\,\mathrm{s} - \frac{1}{2} \cdot 3\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot (4\,\mathrm{s})^2 = 32\,\mathrm{m}\,.$$

Tehát a két megálló $d = s_1 + s_2 + s_3 = 756{,}5\,\mathrm{m}$ távolságra van egymástól.

b)

A villamos a megállóba 2 m/s sebességgel érkezik, és rögtön gyorsít. 1 másodperc alatt 2 m/s-ról 6 m/s-ra gyorsul a jármű, ami 4 m utat jelent, majd 1,5 s alatt megáll, miközben az átlagsebessége 3 m/s, tehát a lassulási szakaszon az útja 4,5 m. Vagyis a troli 8,5 méterrel fut túl a megállón.

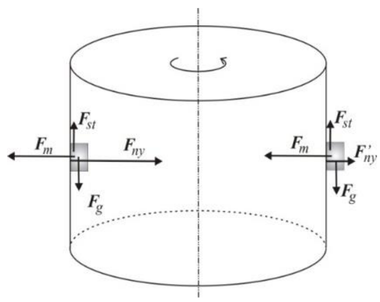
2)

Megoldás.

a)

Legkisebb tapadási súrlódási együttható esetén a tapadási súrlódási erő maximuma kiegyensúlyozza a testre ható nehézségi erőt:

$$\mu_0 \cdot F_{\mathrm{ny}} = mg\,.$$



A testre ható F_{ny} nyomóerő és a F_{m} mágneses erő együtt felelős a test egyenletes körmozgásáért:

$$F_{\mathrm{ny}} - F_{\mathrm{m}} = m \cdot (2\pi f)^2 \cdot R\,.$$

A fenti két egyenletből a tapadási súrlódási együttható már számolható:

$$\mu_0 = \frac{mg}{F_{\mathrm{m}} + m \cdot (2\pi f)^2 \cdot R} = 0{,}101\,.$$

b)

A dinamika alapegyenletét az új helyzetre alkalmazva a következő két egyenlet adódik:

$$\mu_0^* \cdot F_{\mathrm{ny}}^{/} = mg\,,$$

$$F_{\mathrm{m}} - F_{\mathrm{ny}}^{/} = m \cdot (2\pi f^*)^2 \cdot R\,.$$

A fenti két egyenletből az új fordulatszám már számolható:

$$f^* = \frac{1}{2\pi} \cdot \sqrt{\frac{F_{\mathrm{m}}}{mR} - \frac{g}{\mu_0 \cdot R}} = \frac{\sqrt{15}}{2\pi}\,\mathrm{Hz} \approx 0{,}62\,\mathrm{Hz}\,.$$

3)

Megoldás.

a)

A pénzérme a legkisebb 3 m/s sebességét az asztal szélén éri el. A mozgás során az érme gyorsulását megkapjuk kinematikai vizsgálattal:

$$s=\frac{v_0^2-v^2}{2\cdot a} \rightarrow a=\frac{v_0^2-v^2}{2\cdot s}=4\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\,.$$

A pénzérme gyorsulását dinamikai vizsgálattal is megkaphatjuk, majd a csúszási súrlódási együtthatót is:

$$F_s=m\cdot a,$$
$$\mu\cdot mg=m\cdot a,$$
$$\mu=\frac{a}{g}=0,4.$$

b)

Az asztalt elhagyva a pénzérme mozgása vízszintes hajítás. A becsapódás előtti pillanatban a sebessége:

$$v=\sqrt{v_x^2+v_y^2}=\sqrt{v_x^2+(g\cdot t)^2} \rightarrow t=\frac{\sqrt{v^2-v_x^2}}{g}=0,4\,\mathrm{s}\,.$$

Az asztal magassága most már könnyedén számolható:

$$h=\frac{g}{2}t^2=0,8\,\mathrm{m}\,.$$

c)

Két ilyen helyzet is van. Az egyik, amikor az érme még az asztalon van:

$$t_1=\frac{v_0-v_1}{a}=\frac{5\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\text{-}4\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}{4\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}}=0{,}25\,\mathrm{s}\,.$$

A másik ilyen helyzet a vízszintes hajítás közben van. Először határozzuk meg az asztalon való mozgás idejét:

$$t_{2,1}=\frac{\Delta v}{a}=\frac{5\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\text{-}3\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}{4\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}}=0{,}5\,\mathrm{s}\,.$$

Majd az esés idejét határozzuk meg:

$$\left(4\,\frac{m}{s}\right)^2=v_x^2+\left(gt_{2,2}\right)^2 \rightarrow t_{2,2}=\frac{\sqrt{\left(4\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)^2\text{-}\left(3\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)^2}}{g}=0{,}26\,\mathrm{s}\,.$$

A másik helyzet időpontja: $t_2=t_{2,1}+t_{2,2}=0{,}5\,\mathrm{s}+0{,}26\,\mathrm{s}=0{,}76\,\mathrm{s}$

4)

Megoldás.

a)

A pillanatszerű ütközésre alkalmazható a lendület-megmaradás törvénye:

$$2m \cdot v_0 = (2m + 3m) \cdot v ,$$

$$v = \frac{2}{5} \cdot v_0 = 0,8 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} .$$

Dinamikai és kinematikai vizsgálat:

A 2*m* tömegű test gyorsulása: $a_1 = \mu_1 \cdot g = 4 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$.

A 3*m* tömegű test gyorsulása: $a_2 = \mu_2 \cdot g = 2 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$.

A 2*m* tömegű test $t_1 = \frac{v}{a_1} = 0,2\,\mathrm{s}$ idő alatt áll meg, $s_1 = \frac{v \cdot t_1}{2} = 0,08\,\mathrm{m}$ úton.

A 3*m* tömegű test $t_2 = \frac{v}{a_2} = 0,4\,\mathrm{s}$ idő alatt áll meg, $s_2 = \frac{v \cdot t_2}{2} = 0,16\,\mathrm{m}$ úton.

b)

A hátul lévő (2*m* tömegű) test t_1 idő alatt áll meg. Ekkor az elöl lévő (3*m* tömegű) test még mozog. Ebben a pillanatban a távolságuk az általuk megtett utak különbségével egyenlő:

$$d_1 = \left(v \cdot t_1 - \frac{a_2}{2} \cdot t_1^2 \right) - s_1 = 4\,\mathrm{cm} .$$

c)

A két test távolsága, amikor mindkét test már áll: $d_2 = s_2 - s_1 = 8\,\mathrm{cm}$.