37. Mikola Sándor fizikaverseny 2018 Döntő
Gyöngyös, 9. évfolyam
Gimnázium
c
Megoldások

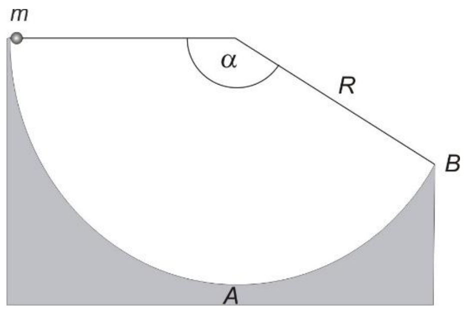
1. Egy α = 150^{o}-os középponti szögű, R = 0,8 m sugarú, körív keresztmetszetű hengeres vályú úgy van elhelyezve a vízszintes talajon, hogy felső végének érintősíkja függőleges legyen. Ennek a vályúnak legfelső pontjából kezdősebesség nélkül elengedünk egy kisméretű, m = 0,2 kg tömegű testet.

a) Mekkora erővel hat a vályú a kis testre, amikor éppen a pálya legalsó, A pontján halad át?

b) Mekkora a kis testre ható eredő erő „ugrása” (hirtelen megváltozása) a B ponton való áthaladás pillanatában?

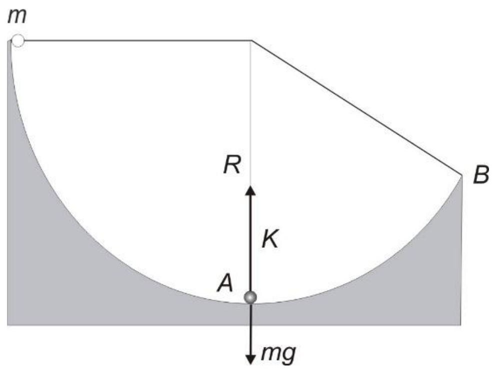
c) Maximálisan milyen magasra emelkedik a kis test kényszerpályájának legmélyebb pontjának szintjétől mérve a B ponton való áthaladás után?

(Minden súrlódás és közegellenállás elhanyagolható. Számoljunk g = 10 m/s^2-tel!)



(dr. Wiedemann László, Budapest)

Megoldás. *a)* Tekintsük az ábrát!



A kis testre hat a nehézségi erő, valamint a keresett kényszererő. Ezek vektori összege okozza a centripetális gyorsulást. Ezek egy egyenesbe eső, ellentétes irányú erők, így a mozgásegyenlet
$\left(\sum F = ma_{\mathrm{cp}}\right)$ egyszerűen felírható:

$$K - mg = m\frac{v^2}{R},$$

ahonnan

$$K = m\left(\frac{v^2}{R} + g\right). \qquad (1)$$

A test A pontbeli sebességének négyzete az energiatételből adódik:

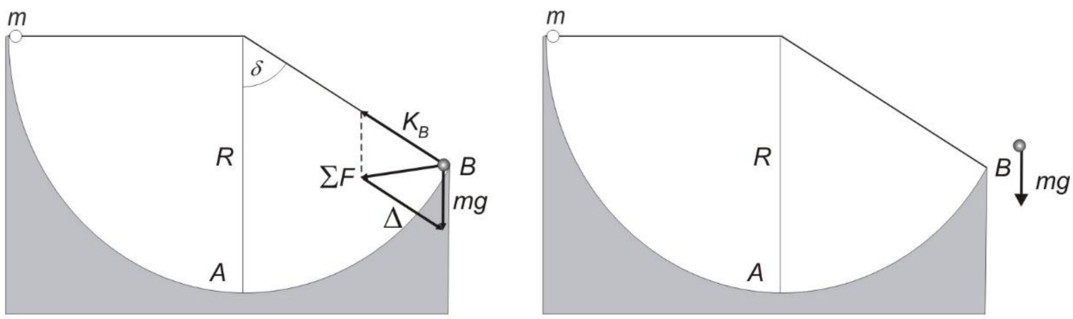
$$mgR = \frac{1}{2}mv^2 \quad \rightarrow \quad v^2 = 2gR, \qquad (2)$$

ugyanis a test süllyedése éppen sugárnyi nagyságú.

(2)-t (1)-be írva kapjuk a keresett kényszererő nagyságát:

$$K = m\left(\frac{2gR}{R} + g\right) = 3mg = 3 \cdot 0{,}2\ \mathrm{kg} \cdot 10\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} = \mathbf{6\ N.}$$

b) Meg kell határoznunk a *B* pontban ható eredő erőt, amely annak elhagyása pillanatában a nehézségi erőre változik. A keresett megváltozást jelöljük Δ-val!



Előtte Utána

Az ábrából látszik, hogy a hirtelen megváltozás („ugrás”) az eredő erő és a nehézségi erő különbsége, vagyis a *B*-pontbeli kényszererő ellentettje. Ennek a nagyságára vagyunk kíváncsiak. Keressük tehát az ottani kényszererő nagyságát!

A mozgásegyenlet szerint:

$$K_B - mg\cos\delta = m\frac{v_B^2}{R} \quad \rightarrow \quad K_B = m\left(\frac{v_B^2}{R} + g\cos\delta\right). \tag{3}$$

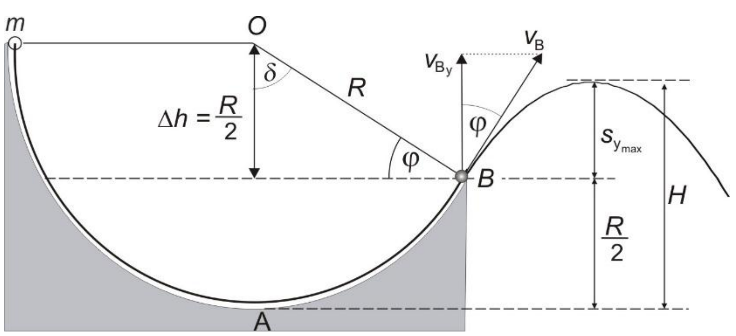
Az itt szereplő δ szög az ábra alapján $\delta = 150^\circ - 90^\circ = 60^\circ$. A *B*-pontbeli sebesség négyzetét az energiatételből kaphatjuk:

$$mg\frac{R}{2} = \frac{1}{2}mv_B^2 \quad \rightarrow \quad v_B^2 = gR. \tag{4}$$

(4)-et (3)-ba írva kapjuk:

$$K = m\left(\frac{gR}{R} + g\cos\delta\right) = mg\left(1+\cos\delta\right) = 0{,}2\ \mathrm{kg} \cdot 10\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\left(1+\cos 60^\circ\right) = \mathbf{3\ N.}$$

c) A kis test a *B* pontban hagyja el a kényszerfelületet. Innen ferde hajítási pályán folytatja útját. A pálya legalsó pontjának szintjétől való maximális emelkedés *H* magassága a *B* pont magasságának és a ferde hajítás maximális magasságának összege. A *B* pont éppen *R*/2 magasan helyezkedik el, ugyanis az ábrán látható *BOA* háromszög egyenlő oldalú. Ez következik abból, hogy a jelzett φ szög pótszöge δ.



A hajítás emelkedési magasságát a *B* ponttól számítjuk. Ehhez szükségünk van a *B* pontbeli pillanatnyi sebesség függőleges komponensének nagyságára, ui. az emelkedés magassága

$$s_{y_{max}} = \frac{v_y^2}{2g}.$$

A test v_B sebessége az energiatételből kapható:

$$mg\Delta h = \frac{1}{2}mv_B^2 \quad \rightarrow \quad v_B = \sqrt{2g\Delta h} = \sqrt{2g\frac{R}{2}} = \sqrt{gR}.$$

Ennek függőleges komponense:

$$v_{B_y} = v_B \cdot \cos\varphi = \sqrt{gR}\cos\varphi.$$

Ezzel a ferde hajítás magasságára kapjuk:

$$s_{y_{max}} = \frac{\left(\sqrt{gR}\cdot\cos\varphi\right)^2}{2g} = \frac{R}{2}\cos^2\varphi.$$

Figyelembe véve, hogy a φ szög 30°, a keresett szintkülönbség:

$$H = \frac{R}{2} + s_{y_{max}} = \frac{R}{2} + \frac{R}{2}\cos^2\varphi = \frac{R}{2}\left(1+\cos^2\varphi\right) = \frac{0,8\text{ m}}{2}\left(1+\cos^2 30°\right) = \mathbf{0,7\,m.}$$

2. Egy 40 cm hosszú vékony fonálra felfüggesztünk egy *m* tömegű kemény golyót és a fonalat feszesen tartva a függőlegeshez képest 60^0-os szögben kitérítjük. A kitérített golyó eredeti helyére, a vízszintes talajra elhelyezünk egy *M* tömegű másik golyót és a rendszert magára hagyjuk. A két test tökéletesen rugalmas ütközés után egyenlő nagyságú, ellentétes irányú sebességgel indul.

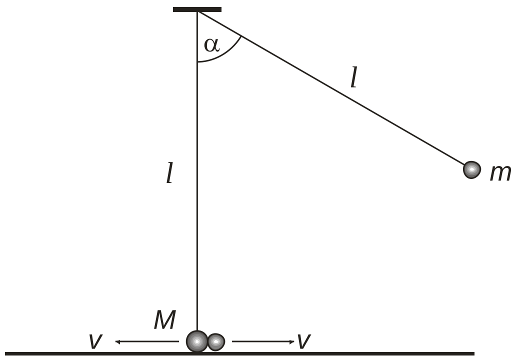
a) Mekkora a *M/m* arány?

b) Mekkorák az ütközés utáni sebességek?

c) Ütközés után milyen magasra emelkedik az *m* tömegű test?

d) Mekkora – közvetlen az ütközés előtti és utáni pillanatban – a fonálerők aránya?

(Számoljunk g = 10 m/s^2-tel!)



(Dudics Pál, Debrecen)

Megoldás. *a)* Az *m* tömegű test helyzeti energiája

$$E_h = mg\left(l - l\cos\alpha\right),$$

ami leérkezéskor mozgási energiává alakul, tehát

$$\frac{1}{2}mv_1^2 = mgl\left(1-\cos\alpha\right),$$

ahonnan a sebesség leérkezéskor:

$$v_1 = \sqrt{2gl\left(1-\cos\alpha\right)} = \sqrt{2\cdot 10\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\cdot 0,4\text{ m}\left(1-\cos 60°\right)} = 2\frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Ekkora sebességgel ütközik az M tömegű golyóval. A tökéletesen rugalmas ütközés után mindkét test azonos nagyságú v sebességgel indul az ábra szerint jobbra, ill. balra. A rugalmas ütközésre vonatkozó impulzus (lendület) és energia megmaradásának tétele szerint:

$$mv_1 = Mv - mv \quad \rightarrow \quad mv_1 = (M-m)v \quad \rightarrow \quad v = \frac{m}{M-m}v_1, \qquad \text{(I.)}$$

és

$$\frac{1}{2}mv_1^2 = \frac{1}{2}Mv^2 + \frac{1}{2}mv^2 \quad \rightarrow \quad mv_1^2 = (M+m)v^2. \qquad \text{(II.)}$$

(I.) -ből a v sebességet (II.)-be írva kapjuk:

$$mv_1^2 = (M+m)\frac{m^2v_1^2}{(M-m)^2}.$$

Egyszerűsítve:

$$1 = (M+m)\frac{m}{(M-m)^2}$$

Rendezve:

$$M^2 - 2Mm + m^2 = Mm + m^2 \quad \rightarrow \quad M^2 = 3Mm,$$

azaz

$$\frac{M}{m} = \mathbf{3}.$$

b) Az ütközés utáni sebességet ennek (I.)-be való behelyettesítésével kapjuk:

$$v = \frac{m}{M-m}v_1 = \frac{m}{3m-m}v_1 = \frac{1}{2}v_1 = \frac{1}{2}\cdot 2\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = \mathbf{1\,\frac{m}{s}}.$$

c) Ezzel a sebességgel indulva a test

$$h = \frac{v^2}{2g} = \frac{1\,\frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}^2}}{2\cdot 10\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}} = \mathbf{0{,}05\,m}$$

magasra emelkedik.

d) Az ütközés előtt a centripetális (eredő) erő a nehézségi erő és a keresett fonálerő vektori összege:

$$K_1 - mg = \frac{mv_1^2}{l} \quad \rightarrow \quad K_1 = m\left(g + \frac{v_1^2}{l}\right),$$

hasonlóképpen ütközés után:

$$K_2 = m\left(g + \frac{v^2}{l}\right).$$

A kettő aránya:

$$\frac{K_1}{K_2} = \frac{\left(g + \frac{v_1^2}{l}\right)}{\left(g + \frac{v^2}{l}\right)} = \frac{10 + \frac{4}{0{,}4}}{10 + \frac{1}{0{,}4}} = \frac{20}{12{,}5} = \mathbf{1{,}6.}$$

3. Motorkerékpáros R = 20 m sugarú körpályán nyugalmi állapotból indulva mindvégig egyenletesen növekvő sebességgel halad. Az első t_1 = 4 s alatt s_1 = 8 m utat tett meg. Indulástól számítva mennyi idő alatt és mekkora út megtétele után kétszerezi meg gyorsulását?

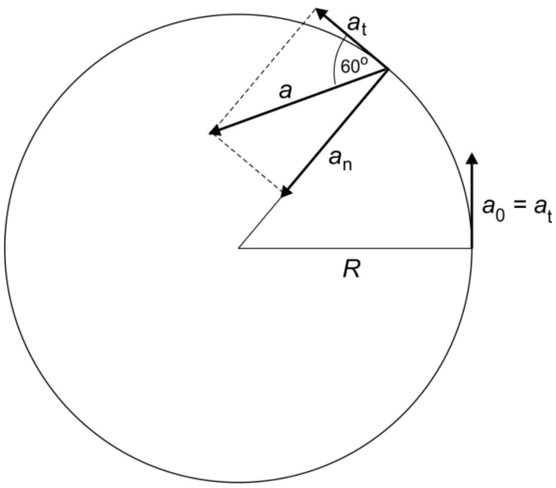
(Holics László, Budapest)

Megoldás. A feladatszöveg szerint a motorkerékpáros kerületi (érintőleges) gyorsulása

$$a_t = \frac{2s_1}{t_1^2} = \frac{2\cdot 8\ \text{m}}{4^2\text{s}^2} = 1\frac{\text{m}}{\text{s}^2} = \text{állandó.}$$

A keresett időpillanatban a gyorsulás $a = 2a_0 = 2a_t = 2\ \text{m/s}^2$.
A normálgyorsulás (centripetális gyorsulás):

$$a_n = \frac{v^2}{R} = \frac{(a_t t)^2}{R}.$$



Az ábrán mutatott geometriai viszonyokból:

$$a_n = a\frac{\sqrt{3}}{2} = 2a_t\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Beírva a normál-gyorsulás kifejezését:

$$\frac{(a_t t)^2}{R} = a_t\sqrt{3},$$

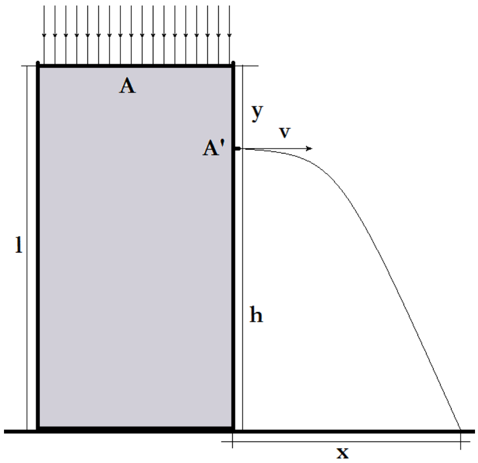
Innen a keresett idő:

$$t = \sqrt{\frac{R\sqrt{3}}{a_t}} = \sqrt{\frac{20\ \text{m}\sqrt{3}}{1\frac{\text{m}}{\text{s}^2}}} \approx \mathbf{5{,}89\ s.}$$

Ezalatt megtett útja

$$s = \frac{1}{2}a_t t^2 = \frac{1}{2}\cdot 1\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\cdot 5{,}89^2\text{s}^2 \approx \mathbf{17{,}35\ m.}$$

4. Egy V = kétezer literes, l = 2,5 méter magas, függőleges tengelyű, nyitott tetejű, körhenger alakú tartály színültig van vízzel. Éppen elkezd esni az eső, amikor kilyukad a tartály oldala. A kerek lyuk átmérője d = 1,6 mm. Óránként 25 mm eső esik.



a) Az aljától mérve milyen magasan lyukadt ki a tartály, ha benne a vízszint nem változik, amíg az eső esik?

b) Hol ér földet a lyukon kiömlő víz? (A talaj vízszintes.)

c) Hogyan kellene megváltoztatni a feladatban az óránkénti esőmennyiséget, hogy a lyukon kiáramló víz a tartálytól a lehető legtávolabb érjen földet?

d) Mekkora ez a távolság?

(A lyukon kiáramló víz pályáját az eső nem zavarja meg. Az esőcseppek kis sebességgel érkeznek. $g = 9{,}81\ \text{m/s}^2$)

(dr. Kiss Miklós, Gyöngyös)

Megoldás: A tartály területe a térfogatából és magasságból

$$V = Al \quad \rightarrow \quad A = \frac{V}{l} = \frac{2\ \mathrm{m}^3}{2{,}5\ \mathrm{m}} = 0{,}8\ \mathrm{m}^2.$$

A

$$v_\mathrm{e} = 25\frac{\mathrm{mm}}{\mathrm{h}} = 6{,}94\cdot 10^{-6}\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

sebességű eső $6{,}94\cdot 10^{-6}\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ vízszint-emelkedési sebességet jelentene a tartály tetejénél.

Az ábra jelöléseit használva:

a) A Bernoulli-törvény, vagy az energia-megmaradás alapján a kiáramló víz sebessége:

$$v = \sqrt{2gy}.$$

Az eső által hozott vízmennyiség:

$$\Delta V = Av_\mathrm{e}\Delta t.$$

Ez a víz távozik a lyukon (folytonossági egyenlet), ezért:

$$Av_\mathrm{e}\Delta t = A'v\Delta t.$$

A kiömlőnyílás keresztmetszete

$$A' = r^2\pi = \frac{d^2}{4}\pi = \frac{\left(1{,}6\cdot 10^{-3}\right)^2\ \mathrm{m}^2}{4}\cdot\pi = 2{,}01\cdot 10^{-6}\mathrm{m}^2$$

területű. Ezzel a kiömlési sebesség:

$$v = \frac{Av_\mathrm{e}}{A'} = \frac{0{,}8\ \mathrm{m}^2\cdot 6{,}94\cdot 10^{-6}\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}{2{,}01\cdot 10^{-6}\mathrm{m}^2} = 2{,}76\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}.$$

.

A sebességre kapott képletből:

$$y = \frac{v^2}{2g} = \frac{\left(2{,}76\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)^2}{2\cdot 9{,}81\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}} = 0{,}39\ \mathrm{m},$$

ezért a lyuk $h = l - y = 2{,}5\ \mathrm{m} - 0{,}39\ \mathrm{m} = \mathbf{2{,}11\,m}$ magasságban keletkezett.

b) A kiáramló víz ebből a magasságból $t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$ idő alatt ér földet. Ez alatt vízszintesen

$$x = vt = \sqrt{2gy}\sqrt{\frac{2h}{g}} = 2\sqrt{yh} = 2\sqrt{0{,}39\ \mathrm{m}\cdot 2{,}11\ \mathrm{m}} = 1{,}814\ \mathrm{m}\text{-rel}$$

kerül arrébb.

c) Az $x = 2\sqrt{yh}$ a számtani-mértani közép egyenlőtlenség alapján akkor a legnagyobb, ha

$$y = h = 1{,}25\ \mathrm{m},$$

azaz

$$\frac{l}{2} = \sqrt{yh} \quad \rightarrow \quad y = h = \frac{2,5\text{ m}}{2} = 1,25\text{ m}.$$

Ehhez $v = \sqrt{2gy} = \sqrt{2 \cdot 9,81\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 1,25\text{ m}} = 4,95\frac{\text{m}}{\text{s}}$ kiömlési sebesség tartozik.

Visszaszámolva a folytonossági egyenletből:

$$v_\text{e} = \frac{A'}{A}v = \frac{2,01 \cdot 10^{-6}\text{m}^2}{0,8\text{ m}^2}4,95\frac{\text{m}}{\text{s}} = \mathbf{1,244 \cdot 10^{-5}\,\frac{m}{s} = 44,8\frac{mm}{h}}.$$

Vagyis ha legalább 44,8 mm eső esik óránként, akkortól jut el a víz a legmesszebbre. Ennél messzebb nem juthat. A felesleges víz kifolyik a tartály pereménél.

d) A távolság ebben az esetben:

$$x = vt = \sqrt{2gy}\sqrt{\frac{2h}{g}} = 2\sqrt{yh} = 2\sqrt{1,25\frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 1,25\frac{\text{m}}{\text{s}}} = \mathbf{2,5\,m.}$$

37. Mikola Sándor fizikaverseny 2018 Döntő
Gyöngyös, 9. évfolyam
Szakgimnázium

Megoldások

1. Egy β = 1,2 s^{-2} szöggyorsulással álló helyzetből induló, r = 1 m sugarú, vízszintes síkú forgó tárcsa szélére egy kis testet helyeztünk.

a) Milyen irányban repül le a kis test, és

b) milyen irányú a testre ható erők eredője a megcsúszás pillanatában az indulási irányához képest, ha a test és a tárcsa közötti tapadási együttható μ_0 = 0,457 ?

(Csányi Sándor, Szeged)

Megoldás: *a)* A test érintőleges (tangenciális) gyorsulása:

$$a_{\mathrm{t}} = \beta r$$

Pillanatnyi sebessége:

$$v = a_{\mathrm{t}} t.$$

Centripetális gyorsulása:

$$a_{\mathrm{cp}} = \frac{v^2}{r}.$$

Az eredő gyorsulása:

$$a = \sqrt{a_{\mathrm{t}}^2 + a_{\mathrm{cp}}^2} = \sqrt{a_{\mathrm{t}}^2 + \left(\frac{r^2\beta^2 t^2}{r}\right)^2}.$$

A test akkor csúszik meg, ha a ráható erők eredője meghaladja a tapadási erő maximumát.

$$\sum F = ma > \mu_0 F_{\mathrm{ny}} ,$$

azaz

$$\sqrt{a_{\mathrm{t}}^2 + \left(\frac{r^2\beta^2 t^2}{r}\right)^2} > \mu_0 g ,$$

átalakítva:

$$a_{\mathrm{t}}^2 + r^2\beta^4 t^4 > \left(\mu_0 g\right)^2 ,$$

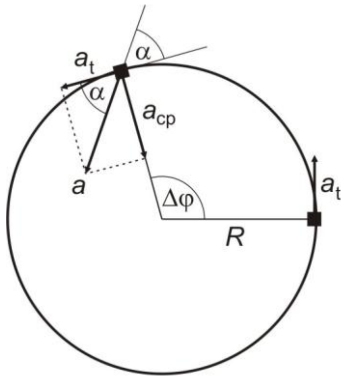
ahonnan az eltelt idő:

$$t > \sqrt[4]{\frac{\left(\mu_0 g\right)^2 - a_{\mathrm{t}}^2}{r^2\beta^4}} = \sqrt[4]{\frac{\left(0,457\cdot 10\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\right)^2 - \left(1,2\,\frac{1}{\mathrm{s}^2}\,1\ \mathrm{m}\right)^2}{1\ \mathrm{m}^2\cdot\left(1,2\,\frac{1}{\mathrm{s}^2}\right)^4}} = 1,75\ \mathrm{s}.$$

Az ehhez tartozó szögelfordulás:

$$\Delta\varphi = \frac{1}{2}\beta t^2 = \frac{1}{2}\cdot 1,2\ \mathrm{s}^{-2}\cdot 1,75^2\,\mathrm{s}^2 = 1,838\ \mathrm{rad} \approx 105,3°.$$

A (nem méretarányos) ábra alapján



$$\frac{F_{cp}}{F_t} = \mathrm{tg}\alpha$$

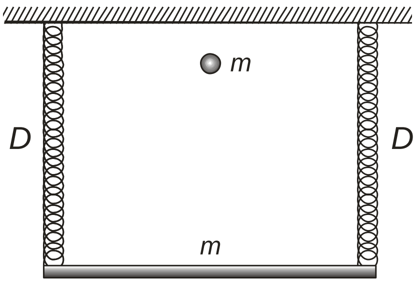
$$\frac{m\frac{v^2}{r}}{mr\beta} = \frac{v^2}{r^2\beta} = \frac{(r\beta t)^2}{r^2\beta} = \beta t^2 = 1{,}2\frac{1}{s^2}\cdot 1{,}75^2 s^2 = 3{,}675.$$

Innen

$$\alpha = \mathrm{arctg}3{,}675 = 80{,}97° \approx \mathbf{74.8°.}$$

A bezárt szög kb. 75 fok.

b) A test érintő irányban távozik, azaz 105,3 fokos szöget bezárva az indulási irányához képest, a testre ható erők eredője 105,3 fok + 74,8 fok = **180,1 fokkal fordul el**.



2. Az ábrán látható *m* tömegű rúd az azonos hosszúságú és *D* direkciós erejű rugókat *x* = 5 cm-rel nyújtotta meg a rendszer nyugalmi állapotában. A rúdra bizonyos magasságból ráejtettünk egy szintén *m* tömegű testet. Az ütközés centrális volt, és a kis test rátapadt a rúdra. Ezt követően a rugók legnagyobb megnyúlása négyszeresére nőtt.

a) Milyen magasról ejtettük a kis testet?

b) A test és a rúd mozgása során mekkora volt a legnagyobb sebesség?

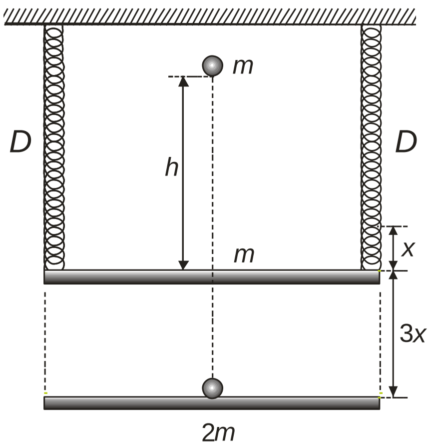
(Suhajda János, Kiskőrös)

Megoldás.

a) A kezdeti egyensúlyi állapotban a rúd súlya és a rugóerő nagysága azonos volt:

$$mg = 2Dx. \qquad (1.)$$

A mechanikai energia-megmaradás törvénye szerint:



$$mgh = \frac{1}{2}mv^2,$$

ahonnan $v = \sqrt{2gh}.$ (2.)

A rugalmatlan ütközésre a lendület-megmaradás törvényét írjuk fel:

$$mv = 2mu.$$

Innen

$$u = \frac{v}{2} = \sqrt{0{,}5gh}. \qquad (3.)$$

Az együttmozgó testek esetén a legnagyobb megnyúlásnál a munkatétel szerint $\left(\sum W = \Delta E_{kin}\right)$, vagyis a nehézségi erő és a rugóerők összmunkája a mozgási energia megváltozásával egyenlő:

$$2mg\cdot 3x - \left(\frac{1}{2}2D(4x)^2 - \frac{1}{2}2Dx^2\right) = 0 - \frac{1}{2}2mu^2.$$

$$6mg\cdot x - D16x^2 + Dx^2 = 0 - mu^2$$

(3.)-ból *u* kifejezését behelyettesítve, rendezve:

$$6mg\cdot x = -m\cdot 0,5gh + 15Dx^2. \qquad (4.)$$

Az (1.) egyenlet figyelembevételével:

$$D = \frac{mg}{2x},$$

amit (4.)-be írva kapjuk:

$$6mg\cdot x = -m\cdot 0,5gh + 15\cdot\frac{mg}{2x}x^2 \quad\rightarrow\quad 6mg\cdot x = -m\cdot 0,5gh + 7,5\cdot mgx.$$

Egyszerűsítve és rendezve:

$$-1,5\cdot x = -0,5h,$$

Innen a keresett magasság:

h = 3x = 3·5 cm = **15 cm.**

b) Az együttmozgó testek az ütközés pillanatától kezdve lefelé gyorsultak mindaddig, amíg a rájuk ható erők eredője lefelé irányult. Az új egyensúlyi helyzeten való áthaladás pillanatában:

$$2mg - 2Dy = 0$$

(1.)-et figyelembe véve:

$$2mg - 2\frac{mg}{2x}y = 0 \quad\rightarrow\quad y = 2x.$$

A munkatételt alkalmazva a 2x megnyúlásra:

$$2mgx - \left(\frac{1}{2}2D(2x)^2 - \frac{1}{2}2Dx^2\right) = \frac{1}{2}2m\upsilon_{\max}^2 - \frac{1}{2}2mu^2$$

Egyszerűsítés és rendezés után:

$$2mgx - D3x^2 = m\upsilon_{\max}^2 - mu^2.$$

(3.) egyenlet figyelembe vételével, ahol h = 3x egyenletet felhasználjuk:

$$2mgx - \frac{mg}{2x}15x^2 = m\upsilon_{\max}^2 - 2m\cdot 0,5g3\cdot x.$$

Egyszerűsítés és rendezés után kapjuk:

$$2mgx - \frac{mg}{2x}3x^2 = m\upsilon_{\max}^2 - m\cdot 0,5g\cdot 3x \quad\rightarrow\quad 2gx - 1,5gx = \upsilon_{\max}^2 - 0,5g\cdot 3x,$$

ahonnan a keresett legnagyobb sebesség:

$$\upsilon_{\max} = \sqrt{2gx} \quad\rightarrow\quad \sqrt{2\cdot 10\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\cdot 0,05\ \mathrm{m}} = \mathbf{1\,\frac{m}{s}}.$$

3. Vízszintes talajon mozgó M = 0,5 kg tömegű hasábra h = 20 cm magasságból m = 0,1 kg tömegű gyurmát ejtünk. A hasáb sebessége az ütközés kezdetekor v_0 = 3 m/s. A két test Δt = 10^{-2} s időtartamú ütközés során összetapad.

a) Mekkora átlagos nyomóerőt fejt ki a gyurma a hasábra az ütközés alatt?
b) Mekkora lesz közvetlenül az ütközés után a közös sebesség, ha a hasáb és a talaj közötti csúszási súrlódási együttható

1. elhanyagolható?

2. értéke 0,4?

(Szkladányi András, Baja)

Megoldás. *a)* A gyurma függőleges irányú sebessége az ütközés előtti pillanatban:

$$v_y = \sqrt{2gh} = \sqrt{2 \cdot 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 0,2 \text{ m}} = 2 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

A gyurma által kifejtett átlagos nyomóerő az ütközésre függőleges irányban felírt lendülettétel alapján határozható meg (pozitív irány felfelé):

$$m\Delta v_y = \left(F_{\text{ny}} - mg\right) \cdot \Delta t$$

$$F_{\text{ny}} = m\left(g + \frac{\Delta v_y}{\Delta t}\right) = 0,1 \text{ kg}\left(10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} + \frac{2 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{10^{-2} \text{s}}\right) = \mathbf{21\,N.}$$

b) Ha a súrlódás elhanyagolható, akkor a közös sebesség az ütközésre vízszintes irányban felírt lendület-megmaradás alapján:

$$Mv_0 = \left(m + M\right) v_{\text{k}},$$

ahonnan

$$v_{\text{k}} = \frac{M}{m+M} v_0 = \frac{0,5 \text{ kg}}{0,1 \text{ kg} + 0,5 \text{ kg}} 3 \frac{\text{m}}{\text{s}} = \mathbf{2,5 \frac{m}{s}}.$$

c) Ha a súrlódás nem hanyagolható el, akkor az ütközésre vízszintes irányban felírt lendülettétel szerint (pozitív irány a hasáb eredeti haladási iránya):

$$m\Delta v + M\Delta V = \sum F \Delta t,$$

részletezve:

$$mv'_{\text{k}} + M\left(v'_{\text{k}} - v_0\right) = -\mu\left(F_{\text{ny}} + Mg\right)\Delta t.$$

Innen a közös sebesség közvetlenül az ütközés befejeződése után:

$$v'_{\text{k}} = \frac{Mv_0 - \mu\left(F_{\text{ny}} + Mg\right)\Delta t}{m+M} = \frac{0,5 \text{ kg} \cdot 3 \frac{\text{m}}{\text{s}} - 0,4\left(21 \text{ N} + 0,5 \text{ kg} \cdot 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right) \cdot 10^{-2} \text{s}}{0,1 \text{ kg} + 0,5 \text{kg}} \approx \mathbf{2,33 \frac{m}{s}.}$$

4. Egy pontszerűnek tekinthető, m = 0,5 kg tömegű testet l = 30 cm hosszú fonálra erősítettünk, amelynek másik végét vízszintesen rögzített szöghöz kötöttük. Ezután a fonalat egyenesnek tartva az így kapott ingát a vízszintesig kitérítettük.

a) Legalább mekkora függőleges, lefelé irányuló kezdősebességgel kell meglökni az inga gömbjét, hogy az végig haladjon a körpályáján?

b) Mekkora a fonálerő a pálya legalsó pontjában?

c) Az *a)* -ban számított minimális sebesség hány százalékával indítottuk lefelé az inga gömbjét, ha a fonál 210^{o}-os elfordulás pillanatában lazult meg?

(Holics László, Budapest)

Megoldás. *a)* A legkisebb sebesség azt jelenti, hogy amikor az inga gömbje eléri a háromnegyed fordulatot, a fonálban végig hasson (az egyre csökkenő) fonálerő, és a pálya legfelső pontjában váljon csak zérussá. (Ezután a fonálerő ismét növekedni fog, vagyis az inga gömbje tovább folytatja körpályán a mozgását.)

Ha valamekkora $\upsilon_{\min}$ sebességgel elindítottuk a kis testet, félfordulat megtétele pillanatában sebessége – a mechanikai energia megmaradás törvénye szerint – ismét az indítási sebesség nagyságával halad, csak felfelé. A keresett minimális sebességet a továbbiakban számíthatjuk úgy, mintha innen indítottuk volna a kis testet. A munkatétel, valamint a Newton-törvény adja meg a választ a kérdésünkre. A munkatétel szerint:

$$\frac{1}{2}m\upsilon_1^2-\frac{1}{2}m\upsilon_{\min}^2=-mgl$$

$$\upsilon_1^2-\upsilon_{\min}^2=-2gl \qquad \rightarrow \qquad \upsilon_{\min}^2=\upsilon_1^2+2gl$$

ahol υ_1 a legfelső pontbeli sebesség.

Newton törvénye alapján a legfelső pontban a körmozgáshoz tartozó centripetális gyorsulás éppen a g nehézségi gyorsulás, mert ebben a pillanatban semmi más erő nem hat az inga gömbjére, mint a nehézségi erő. Így ez kifejezve a pillanatnyi sebességgel és a körpálya sugarával:

$$g=\frac{\upsilon_1^2}{l}.$$

Innen
$$\upsilon_1^2=gl.$$

Ezt a minimális indítási sebesség kifejezésébe írva kapjuk az eredményt:

$$\upsilon_{\min}^2=3gl \qquad \rightarrow \qquad \upsilon_{\min}=\sqrt{3gl}=\sqrt{3\cdot 10\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\cdot 0,3\text{ m}}=\mathbf{3\,\frac{m}{s}}.$$

b) A pálya legalsó pontjában Newton II. törvénye szerint:

$$K-mg=m\frac{\upsilon_{\max}^2}{l},$$

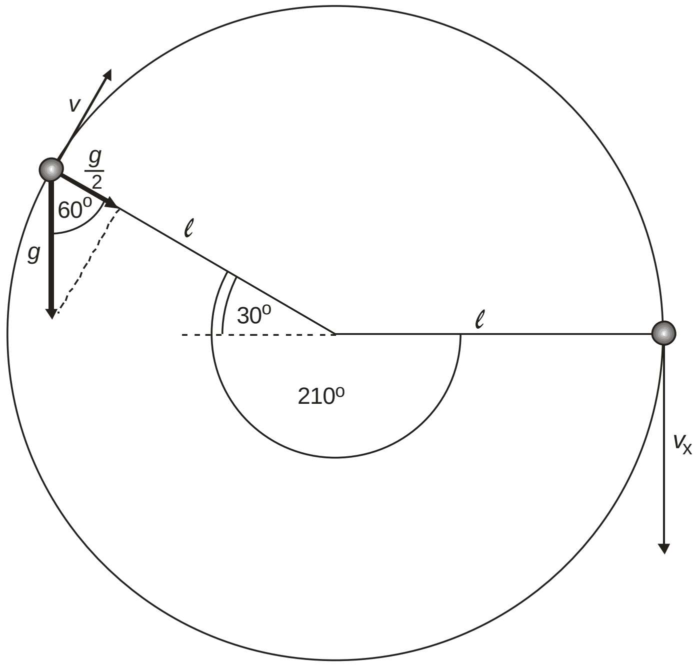
ahol a maximális sebesség a munkatételből:

$$\frac{1}{2}m\upsilon_{\max}^2-\frac{1}{2}m\upsilon_{\min}^2=mgl \qquad \rightarrow \qquad \upsilon_{\max}^2=2gl+\upsilon_{\min}^2=2gl+3gl=5gl.$$

Ezzel a fonálerő:

$$K=m\frac{\upsilon_{\max}^2}{l}+mg=m\frac{5gl}{l}+mg=6mg=6\cdot 0,5\text{ kg}\cdot 10\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}=\mathbf{30\,N}.$$

c) Ha 120 fokot fordult el a fonál az indulástól kezdve, akkor abban a pillanatban 30 fokos szöget zár be a vízszintessel. Mivel ekkor a fonál meglazul, ettől kezdve csak a nehézségi erő hat az inga gömbjére. A keresett új indítási sebességet jelöljük v_x-szel! A sebesség- és gyorsulás-viszonyokat az ábrából láthatjuk:



Mivel a fonálerő megszűnt, a testre csak a nehézségi erő hat, a mozgáshoz tartozó centripetális erőt is csak a nehézségi erő sugár irányú komponense szolgáltathatja.

Az ábrából látszik, hogy a fonál meglazulása pillanatában a centripetális gyorsulás éppen $g/2$, ugyanis egy 60 fokos („szabályos”), g oldalú háromszög egyik oldalának a fele. Ez, mint centripetális gyorsulás a pillanatnyi v sebességgel a következő kapcsolatban van:

$$\frac{g}{2} = \frac{v^2}{l} \quad \rightarrow \quad v^2 = \frac{gl}{2}.$$

Ekkora sebességgel halad itt az inga gömbje. Az ábrán a szabályos háromszög-részletre tekintve láthatjuk, hogy a vízszintes helyzettől való emelkedés magassága éppen $l/2$. A munkatétel ismét megadja a választ kérdésünkre:

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_x^2 = -mg\frac{l}{2} \quad \rightarrow \quad v_x^2 = v^2 + gl\,.$$

Beírva a fonál lazuláskori sebesség kifejezését kapjuk:

$$v_x = \sqrt{\frac{gl}{2} + gl} = \sqrt{\frac{3}{2}gl}.$$

A kérdezett százalékarány:

$$p = \frac{v_x}{v_{min}} \cdot 100\% = \frac{\sqrt{\frac{3}{2}gl}}{\sqrt{3gl}} \cdot 100\% = \sqrt{0,5} \cdot 100\% = \mathbf{70,71\%}$$